MISCELÁNEA POLIANA

Revista de prepublicaciones del
*Instituto de Estudios Filosóficos*
LEONARDO POLO

SERIE DE FILOSOFÍA, nº 40 (2013)

**NOTAS PERSONALES**
**SOBRE EL SER DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS**

**Julián Calderón Almendros**

El problema de pensar sobre las matemáticas desde un punto de vista radical, interior a la totalidad pasa por volverse hacia el ser de los objetos de la matemática, por varias razones:

1) Lo pensado ya por Kant sobre las matemáticas tiene ya un peso muy importante independiente de su grado de validez en total.

2) Hay mucho pensado desde finales del XIX tanto desde el punto de vista de los matemáticos como del filosófico-lógico: Bolzano, Dedekind, Cantor, Frege, Peano, Hilbert, Russell, Husserl, Wittgenstein y otros. Casi todos tienen algo que decir pero siempre sobre unos fundamentos cercanos. Las disensiones son difíciles de evitar y sin embargo a día de hoy se piensa aún como una solución dolorosa pero inevitable que los objetos matemáticos son objetos independientes del hombre y se postula como única solución completa un platonismo matemático (a regañadientes, pero sin conocer otra solución). El ejemplo paradigmático de todo esto es Gödel.

3) Las lecturas más interesantes en cuánto al acercamiento a la matemática (aunque no lo hagan expresamente) desde el punto de vista filsófico son Husserl “Investigaciones lógicas”, "Ser y Tiempo" de Heidegger y Wittgenstein tanto su "Tractatus" como sus "Investigaciones filosóficas". Otro momento importante es Hegel en sus intento de alcanzar un concepto universal que no esté vacío de la contenido concreto (su universal concreto). Ni que decir tiene que la lectura de "Crítica de la razón pura" de Kant, aporta la casi total contextualización al debate actual.

4) Es habitual pensar en la matemática como en una ciencia que ofrece modelos de comprensión para otras ciencias. Indudablemente lo hace. Pero reducirla a eso es no darse cuenta de su auténtica realidad y actividad. La matemática si ofrece soluciones para otras ciencias es solo porque interesa como actividad en sí misma. Se han escuchado con frecuencia lamentos de físicos por el tiempo que los matemáticos pierden en juegos (rompecabezas) fútiles. Pero son esos juegos fútiles los que proporcionan herramientas poderosas para trabajar en física o en economía. La matemática se desarrolla mayormente por la belleza de los objetos matemáticos

mismos. Y esta aserción es comúnmente expresada explícitamente por los matemáticos.

Recientemente, al leer "Ser y Tiempo" de Heidegger se me han ocurrido algunas ideas.

Para comenzar veamos que los matemáticos llaman a sus abstracciones objetos matemáticos (literalmente). Éstos son llamados y pensados así. Muy recientemente un matemático japonés de prestigio ha armado un cierto revuelo, en matemáticas no hay grandes revuelos como en física u otras ciencias, todo es discreto, todo es un susurrar que alguien podría haber encontrado una solución a un antiguo problema, que a la vez ha encontrado un nuevo objeto matemático muy poderoso que se convertirá en una poderosa herramienta, pero comprender un nuevo objeto lleva años, así que todo hay que decirlo bajo.

Pero eso es como lo piensan los matemáticos. Pero: ¿no son las matemáticas un objeto de la vida cotidiana? En Kant no es nunca un objeto, pero es claro por su forma de entender la sensación/percepción que es parte integrante de todos los objetos intramundanos. Pero si nos vamos a nuestro habitual quehacer vemos otras cosas. Contamos: 1, 2 , 3 ,4 ¿dónde está Irene?, falta Irene. Y los contamos como números naturales completamente definidos. La prima de riesgo ha subido al x%. Todos nos preocupanos. Tenemos miedo ante ciertas situaciones que aparecen mediante números. Me han reducido un 5% el salario, ¿tendré que hacer ajustes? ¿qué gasto puedo evitar que compense la pérdida en mi salario?. Vamos a tener otro niño, tengo miedo: ¿podremos con 5 niños?. Si solo dijéramos muchos, no nos preocuparíamos por el 5º. Tengo que ir a la escuela, no importa está cerca (en este caso es espacio euclídeo matemático).

No creo que tenga que dar ahora muchos más ejemplos. Los objetos matemáticos cotidianos, aparecen como entes intramundanos en cuánto que son objeto de temor.

Tanto son objetos cotidianos, que lo mesopotámicos y los egipcios los empleaban (y de hecho nacieron) como objetos a la mano para la cuenta de los días y las lluvias, para la construcción de viviendas y grandes obras arquitectónicas, ciudades. Y no eran objetos matemáticos muy simples. Los mesopotámicos sabían resolver ecuaciones de segundo grado exactamente igual que nosotros. Hacían raíces cuadradas de la misma forma que nosotros. La geometría y un buen número de teoremas se conocían tanto en Egipto como en Mesopotamia. El teorema de Pitágoras tiene quizás unos 4000 años de antigüedad, sino mucho más. Y no porque les gustara la matemática, sino porque era imprescindible para la agrimensura.

De hecho es difícil pensar en el hombre sin pensar en el conteo y la utilización de conceptos geométricos sencillos. Hay huesos con numeración de más de 20000 años de edad.

Hace falta pensarlo más pero no creo que la vida social del hombre se halla desarrollado alguna vez sin la utilización de rudimentos matemáticos.

Pero tal como he descrito los objetos matemáticos, en el fondo no son más que objetos "a la mano" del "ser ahí en el mundo" en su "cura". Y no parecen dentro de estos unos objetos cualquiera. Más bien parecen objetos a la mano que el ser-ahí utiliza necesariamente, objetos a la mano que están ahí como tales desde el principio, vienen con el hombre y con el mundo. Una vez hay hombre y hay mundo hay objetos matemáticos. Tienen una faz que claramente los muestra como entes intramundanos (¿quizás son más propios del mundo en cuanto tal y por lo tanto no intramundanos?, en principio no lo creo).

Pero ¿que hay de la matemática que se desarrolla como ciencia y sus objetos?. Primero veremos cómo nació esta ciencia brevemente.

Los comienzos de la ciencia matemática en la Antigua Grecia (siglos VI y V a.C.) fueron una acumulación ingente de hechos (verdades) matemáticas traídas por algunos grandes viajantes-recopiladores. El teorema de Pitágoras no es ni de Pitágoras ni de Tales como a veces parece querer decirse. Era cosa sabida por que había hecho falta en la agrimensura desde hacía mucho. Lo que cambió fue la forma de tratar con los objetos matemáticos. Hasta ahora habían sido objetos a la mano para la cura del ser ahí en el mundo. Ahora se los mira directamente, se los pone ante los ojos. Se desentraña buena parte de su estructura, y aparece la primera demostración matemática. Estos objetos se dejaban manipular y guardaban relaciones unos con otros muy sencillas. Se podía razonar y de unos pocos axiomas muy sencillos empezamos a generar objetos. Esto es increíble. ¿Qué otro objeto da otros objetos con esta misma facilidad a partir de sí mismo?. A los primero objetos matemáticos le pedimos objetos y estos nos los dan. Y algunos de estos objetos son verdad y otros solo objetos definidos. Pero el razonamiento lógico nos ofrece a través de objetos verdad (teoremas) y objetos definición (conceptos bien definidos) otros objetos verdad y nos estimula a definir otros objetos definición nuevos.

Pero este proceso es clásico en la matemática y sigue dándose hoy en la misma forma en que se daba entonces. Sobre los conceptos definición nos planteamos preguntas (igual que cuando no era ciencia nos planteábamos problemas de repartir la tierra o el agua y mirábamos alrededor y encontrábamos objetos matemáticos útiles que nos iban haciendo ganar terreno en la resolución de problemas), que contestamos mediante la creación de nuevos objetos matemáticos. La ciencia matemática trata los objetos matemáticos exactamente en la misma forma de objetos a la mano que utilizábamos de modo meramente existencial. Cambia la finalidad. Ahora el problema es ante los ojos, mientras el problema (matemático) del ser ahí sin ciencia matemática no era en absoluto ante los ojos porque la resolución del problema llevaba consigo tiempo (el mismo que el del hombre) que contaba para el propio quehacer humano. Esa es la diferencia fundamental entre las dos formas de hacer matemáticas. Pero el objeto matemático en uno y otro caso sigue siendo el mismo.

Esta es la tesis: el ser del objeto matemático es especial porque no varía de su uso en el mundo a su uso ante los ojos. Al poner el objeto matemático ante los ojos no pierde nada. De hecho, el ponerlo ante los ojos es terriblemente liberador, porque en nada el objeto matemático padece del tiempo del mundo solo del tiempo de ser ahí que lo usa. Si el ser ahí que lo usa se para, el objeto matemático se esclarece porque no le iba en absoluto estar mezclado con el tiempo del mundo. Ahora es cuando se lo comprende bien. El estado de interpretado del objeto matemático no varía de un contexto al otro. Es propio del objeto matemático el ponerse ante los ojos y poder ser examinado sin ninguna pérdida por su detención en el tiempo.

Ahora se comprende mejor el eterno intento de poner ante los ojos todo y buscar expresamente una "validez matemática". Los tiempos de una piedra son geológicos y para nosotros está casi parada en el mundo, pero la piedra padece el tiempo del mundo que nosotros también padecemos. Es fácil llevarse a verla ante los ojos y buscar su esencia, su verdad interna, al igual que hemos hecho con el teorema de Pitágoras. Una vez ha comenzado la ciencia matemática es casi inevitable que todas las ciencias, incluso la filosofía, intente igualar los demás entes a los matemáticos, no solo (incluso es lo de menos, solo como consecuencia) por la certeza que ofrece, sino porque de hecho es el modelo ideal de hecho de entes a los que podemos desentrañar su ser precisamente ante los ojos. Son el modelo en el sentido que solo al ser del objeto matemático le va detenerse para ser observado.

Hay algunas cosas interesantes sobre el tiempo y las matemáticas. Kant intentó poner el álgebra y el análisis matemático como condiciones de nuestra experiencia en el tiempo. Pero los objetos matemáticos solo contienen un modelo del tiempo del mundo, una abstracción que es la secuencia. La secuencia es siempre ante los ojos, y nunca es como el tiempo. Del tiempo solo el momento presente puede estar ante los ojos. La secuencia, que recorre todo el tiempo (pasado, presente y futuro) puede estar toda ella a la vez como tal ante los ojos sin perder un ápice de su originalidad. Así que es cierto que tiempo comparte con la secuencia matemática una cierta estructura, pero ésta no da razón de lo que el tiempo nos expresa: solo el presente está ante ti. Sabes que hay más momentos pasados y futuros. Pero todos son lejanos. Querrías acercarlos pero eso es del cuidado del ser ahí, del sentido de su ser.

Bueno todo habría que mirarlo con más cuidado y asegurarme de lo que digo, pero creo que se desprenden muchas más consecuencias de esta observación.

Le he seguido dando vueltas a las ideas que expuse. Creo que el punto débil está en la unicidad que predicaba de los objetos matemáticos como objetos que permanecen inalterados cuando se les pone ante los ojos.

Se me ha ocurrido que algo así podría ocurrir en general con los objetos que son solo pensados, esto es, cuyas referencias (la intecionalidad) terminan en lo pensado. Estoy pensando en las esencias que investiga Husserl en la fenomenología. El problema es que debo saber algo más sobre estos otros objetos pensados para poder pensar mejor como sean. De todas formas tengo la seria sospecha que se diferencian demasiado de los objetos matemáticos. Habría que ver en primer lugar si estos objetos de la fenomenología se dan también como entes a la mano. Así que dejo en principio ese camino para otro momento.

Sobre los objetos matemáticos (objetos teoremas, objetos definición, objetos problema) hay más que decir, creo que de importancia en cuanto a su forma de ser. Esta visión tiene que ver más con la idea Hegeliana del universal concreto. Es claro que Hegel cree que tiene muchos más universales concretos que los que yo voy a citar, pero si es así, los objetos matemáticos deben tener un lugar destacado entre todos. Hay que recordar que en su búsqueda del infinito encuentra como primer concepto infinito el infinito matemático, pero lo desecha como un primer infinito que casi no lo es, dice de él que es el infinito negativo, que surge sólo de sumar uno cada vez y poder hacerlo siempre. Y dice que es sencillo, trivial. Y en eso lleva absoluta razón. No se le puede reprochar que aún habiéndolo encontrado en una época en que el infinito matemático no era aceptado como tal por los mismos matemáticos no le preste más atención (habría que recordar aquí la protesta de Gauss por el uso que se estaba haciendo en matemáticas del infinito, para Gauss el infinito estaba prohibido, solo había procesos de tendencia, y esta preocupación por el infinito, que nació ya con los pitagóricos antes del V a.C., que condiciona toda la matemática Griega, será fuertemente problemática hasta el periodo 1870-1890, dónde se matematiza el concepto de infinito en una serie de objetos).

Voy a dar unas ideas que serán correctas en el fondo, aunque me interesan más como cuestión de método. Voy a llamar objetos matemáticos de orden 1 a los conocidos más habitualmente: triángulos, círculos, números naturales (individualmente cada uno), medidas concretas al comparar, la comparación concreta misma y todos los que en un primer momento podamos pensar y se utilicen a la mano pero sin la ciencia. Que sean de primer orden es solo una definición inicial, que se irá volviendo con el paso de las palabras en un concepto más y más difuso (fuzzy, es un concepto que se utiliza en ingeniería y en matemáticas que inventó el iraní Zadeh: fuzzy logic y fuzzy sets). Con el trato de los objetos de orden 1, sobrevienen preguntas, observaciones reiteradas que terminan siendo teoremas por la vía del hecho (teorema de Pitágoras, longitud de un círculo, esto es 6*r,...). Para responder a las preguntas necesitamos esas observaciones. Pero tanto las preguntas como las observaciones, son ya de un grado de generalidad y abstracción mayores que las primeras. Digamos que son de orden 2. Pero en su generalidad no pierden contenido. Veamos, cuando de ver muchos pájaros concretos decimos aves o palmípedos, perdemos los detalles de las distintas especies de aves o géneros dentro del género ave. Ganamos generalidad pero perdemos la concreción de la especie o la del individuo. Sin embargo con estos objetos de orden 2 no hemos perdido nada. Veamos, los números (hablando sólo de 1, 2, 3, ...) es un concepto (una definición sobrevenida de hecho) que no pierde a ninguno de sus números particulares, ni detalle alguno de estos números concretos. Al decir (esto es muy posterior) N, no solamente vemos todos los números particulares en todo su detalle, sino que añadimos concreción: en N los números están constituidos por un número particular, el 1, el conteo o la suma fija con el 1, y el principio de inducción matemática que nos concreta sobremanera en qué consisten los números. Hemos ganado la totalidad de los números y una infinidad más en qué consisten todos ellos. Me quedo en la infinidad más: en que consisten todos los números. Este solo objeto me da cada uno de sus números completamente explicitado. El teorema de Pitágoras me da todos los triángulos rectos totalmente explicitados, sin pérdida alguna de concreción, es más, ganamos la idea de distancia en el plano, la distancia normal y corriente que siempre habíamos tratado por separado: he andado un día. Ahora esa distancia (un día de andar) está dentro de los triángulos y del teorema de Pitágoras. Todos los puntos se encuentran en una distancia que tiene componente norte-sur y este-oeste por ejemplo, y la distancia se calcula sobre estos triángulos rectos, nuestro camino es la hipotenusa. Aparece la geometría práctica. O mejor, ya había aparecido.

Para cuando se empieza a hacer ciencia matemática moderna (500 a.C. en Grecia), se había andado ya mucho. De hecho los objetos que aparecen de nuevo en la ciencia serían ya (es una exageración) de orden aleph_0. El teorema de Pitágoras aparece en un tablilla de arcilla Mesopotámica en el 2000 a.C. y en Egipto por la misma época, y por lo que sabemos independientemente en China y la India en el 400 a.C. o así (en China creo que mucho antes). El número pi (longitud de una circunferencia de radio 1/2) aparece aproximado en todas las civilizaciones que he mencionado.

Lo que ocurre es que en cada nuevo orden de abstracción y generalidad obtenemos con los nuevos objetos una definición absolutamente comprensiva de los anteriores objetos. Los objetos matemáticos de orden 1 reaparecen recomprendidos como en un número de objetos de orden 2 más pequeño y mejor pensados.

Cuando llegamos a nuestro aleph_0, el repensamiento de toda la matemática anterior es completo, así que aparecen objetos matemáticos muy novedosos como las demostraciones, con las que el número de objetos particulares a los que hacer referencia directa se ve tremendamente reducido. Se hacen 2 grandes regiones de objetos matemáticos: los geométricos y los aritmético-algebráicos. Extensión, distancia, medida y por otro lado números y ecuaciones.

Hoy lo dejo aquí: la idea es que falta ver como el proceso se acelera, y surgen nuevos objetos de orden mayor y todos los objetos anteriores empiezan a estar a la vez perfectamente definidos en varias regiones de objetos. Esta ganancia de concreción en la mayor generalidad es la que quiero estudiar. Porque además no es una generalidad cualquiera: no vale cualquier generalización por correcta que sea desde el punto de vista lógico. Por otra parte quiero ver como es la matemática en general, como actividad expresa que trata con objetos matemáticos. La matemática como actividad no se puede llevar ante los ojos como ocurre con los objetos que trata.

Antes de terminar de hacer estas primeras reflexiones sobre los objetos de la matemática, quiero ver que entendemos por concreción.

Miraré primero el concepto de concreción, por que el de abstracción es el más estudiado y divulgado, mientras que el de concreción es básicamente un referir a los objetos intramundanos del mundo del ser-ahí.

Concretar, en principio tiene al menos dos acepciones. La primera sería la ya mencionada. Esto es: - He ido de caza. He cazado bastantes liebres. - ¡Venga hombre! Nunca cazas nada. ¡Venga, demuéstralo! Enséñame las piezas. Aquí es: pon las piezas individuales que has cazado ante mí. Si aparece alguna creeré que has cazado y no solo que has ido de caza. Pedimos concreción, pruebas, el objeto al que remite indefectiblemente el "he cazado" que son "las piezas de caza". Cuando decimos que un concepto universal se hace general y pierde lo concreto, viene a decirse que pierde a los individuos, que de fondo, aunque sea esencial en el proceso cognitivo el esquema general pierde a los individuos, y que para recobrarlos hay que pasar de nuevo de la idea general a la práctica, al mundo en el que se encuentran los individuos generalizados en el universal. El universal como concepto general es un universal que queda como un esquema vacío. Por un universal generalizador perdemos la substancia que queremos explicar, y el razonamiento con él se vuelve hueco. Parece que en principio su capacidad de explicar decrece cada vez más con su ascenso universalizador/generalizador. Concretar es concretar (señalar) uno entre muchos iguales designados por el universal generalizador, que ha perdido esa capacidad de señalar entre los iguales bajo él.

Hay otra acepción del verbo concretar. - Tengo una idea sobre como podemos ponernos de acuerdo en la hora de la reunión. - Llevamos ya una semana y cuando le viene bien a casi todos y parece que vamos a concretar la hora de la reunión surge alguien a quién no le cuadra la hora y le es imposible asistir. O me dices concretamente lo que quieres decir o no creo que vayas a solucionar el problema. - Tenía que haber comenzado por ahí, no con vaguedades. He abierto una herramienta de Google, con la que podemos poner internamente al grupo cuándo nos viene bien a cada uno. Cada uno entra con su cuenta en el mismo calendario, y pone cuándo es imposible para él y cuándo le viene mejor. Cuando es posible lo puede calificar como más conveniente para él o menos. Eso lo hacemos hoy. Esta noche miramos dónde coincidimos más. Casi seguro que podremos concretar el día y la hora, pero si no hay espacios de encuentro en el calendario sencillamente no se puede hacer. Hay que pensar en otra cosa. Esta noche está resuelto.

En esta conversación aparece la otra acepción. Concretar es definir. Una idea con límites difusos no es una idea concreta. Una idea muy bien delimitada es una idea concreta. Una idea bien definida.

Los conceptos matemáticos (objetos matemáticos) tienden, como en todas las ciencias, pero incluso en su desenvolvimiento en el quehacer (curarse) del ser-ahí, a engendrar nuevas abstracciones y generalizaciones. Bien, lo que sostengo es que las generalizaciones en matemáticas, esto es los objetos matemáticos de superior abstracción en las matemáticas, son más universales y a la vez concretos en los dos sentidos especificados. El nuevo conjunto de objetos matemáticos de abstracción mayor no pierde en ningún momento las referencias concretas a los objetos matemáticos de menor abstracción, de forma que los insertan en un mundo matemático en el que están más definidos junto a otros posibles objetos (posiblemente muy distintos) pero que los definen mucho más concretamente en el mundo matemático que se va ampliando. Y no solo como colectivo de objetos sino individualmente. De hecho, en el nuevo nivel de abstracción, los objetos anteriores son "recreados", y aspectos no conocidos de ellos en la abstracción anterior, son ahora conocidos en el sentido cuando menos de definidos y delimitados. No sé si los universales concretos de Hegel en su ciencia son tan concretos como él dice: pero lo que es seguro es que existen unos objetos universales concretos que cuánto más universales, más concretos: los objetos matemáticos. Y esto es por la propia naturaleza de los objetos matemáticos, por la naturaleza de la actividad que llamamos matemáticas, y porque ahora sabemos que son el prototipo de objetos a la mano que se muestran idénticos cuando se los pone ante los ojos. Son también el prototipo de universalización-generalizadora que no pierde el individuo abstraído ni el detalle del individuo abstraído y que lo determina aún más.

Por eso, ha habido matemáticos que han dicho que para el matemático el número y el cálculo son un estorbo, si te quedas en ellos no los comprendes, tienes que dejarlos atrás en el ascenso generalizador para conocerlos mejor como objetos individuales.

Sin embargo mentiría si dijera que todo es generalizar en matemáticas. No vale cualquier formalización de los objetos matemáticos, cualquier abstracción no va a ser parte de las matemáticas. El número de formalizaciones, y el número de posibles abstracciones es abrumador. Un número al azar en la recta real, dónde la probabilidad de encontrarlo es cero. Y esto es algo que es fácil de comprobar. ¿Cómo encontramos esas nuevos objetos matemáticos?. Esta es una de las ramas de reflexión más bonitas y sorprendentes que está por venir.